ESERCIZI SVOLTI IN AULA E D'ESAME
a cura di Stefano Patrì

Esercizio 1. La dinamica di una particella di spin 1 è descritta dall'hamiltoniana

$$H = \frac{\alpha}{\hbar^2}\, \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$$

e all'istante di tempo $t = 0$ lo stato della particella è rappresentato dal ket

$$|\psi, 0\rangle = |1, 1\rangle_L |1, -1\rangle_S\, .$$

Al generico istante di tempo $t > 0$ determinare, relativamente all'osservabile L_z, i possibili valori di una misura, le rispettive probabilità e il valor medio.

Soluzione dell'esercizio 1. Il ket $|\psi, 0\rangle$ è autostato simultaneo degli operatori $\boldsymbol{L}^2, \boldsymbol{S}^2, L_z, S_z$, ma non è autostato dell'hamiltoniana perché se indichiamo con $\boldsymbol{J}$ il momento angolare totale $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ e scriviamo l'hamiltoniana nella forma

$$H = \frac{\alpha}{2\hbar^2} \left(\boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{L}^2 - \boldsymbol{S}^2\right),$$

osserviamo che gli autostati dell'hamiltoniana sono gli autostati $|l, s; j, j_z\rangle$ simultanei degli operatori $\boldsymbol{L}^2, \boldsymbol{S}^2, \boldsymbol{J}^2, J_z$. Per ottenere dunque lo stato al generico istante di tempo $t > 0$, dobbiamo esprimere lo stato $|\psi, 0\rangle$ come combinazione lineare di autostati dell'hamiltoniana; mentre per rispondere alle domande relative all'operatore L_z, dovremo poi esprimere lo stato $|\psi, t\rangle$ come combinazione lineare di autostati $|l, l_z\rangle|s, s_z\rangle$ simultanei degli operatori $\boldsymbol{L}^2, \boldsymbol{S}^2, L_z, S_z$. Se utilizziamo allora i coefficienti di Clebsch-Gordan, esprimiamo dunque il ket $|\psi, 0\rangle$ come combinazione lineare di austostati degli operatori $\boldsymbol{J}^2, J_z$ e quindi dell'hamiltoniana

$$|\psi, 0\rangle = |1, 1\rangle_L |1, -1\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{6}}\, |1, 1; 2, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\, |1, 1; 1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\, |1, 1; 0, 0\rangle,$$

e calcoliamo le azioni dell'hamiltoniana sui suoi tre autoket

$$H|1, 1; 2, 0\rangle = \frac{\alpha}{2\hbar^2} \left(\boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{L}^2 - \boldsymbol{S}^2\right) |1, 1; 2, 0\rangle =$$

$$= \frac{\alpha}{2\hbar^2} \,(2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2)\, |1, 1; 2, 0\rangle = \alpha |1, 1; 2, 0\rangle,$$

$$H|1, 1; 1, 0\rangle = -\alpha |1, 1; 1, 0\rangle \qquad \text{e} \qquad H|1, 1; 0, 0\rangle = -2\alpha |1, 1; 0, 0\rangle,$$

da cui segue l'evoluzione temporale (con $\alpha/\hbar = \omega$)

$$|\psi, t\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\, |1, 1; 2, 0\rangle + \frac{e^{2i\omega t}}{\sqrt{2}}\, |1, 1; 1, 0\rangle + \frac{e^{3i\omega t}}{\sqrt{3}}\, |1, 1; 0, 0\rangle,$$

in cui è stato trascurato l'irrilevante fattore di fase complessivo $e^{-i\omega t}$ posto in evidenza.

A questo punto utilizziamo di nuovo i coefficienti di Clebsch-Gordan per esprimere lo stato $|\psi, t\rangle$ come combinazione lineare di autostati $|l, l_z\rangle|s, s_z\rangle$ simultanei degli operatori $\boldsymbol{L}^2, \boldsymbol{S}^2, L_z, S_z$

$$|\psi, t\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\, |1, 1; 2, 0\rangle + \frac{e^{2i\omega t}}{\sqrt{2}}\, |1, 1; 1, 0\rangle + \frac{e^{3i\omega t}}{\sqrt{3}}\, |1, 1; 0, 0\rangle =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\,|1,1\rangle_{\!L}|1,-1\rangle_{\!S} + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1,0\rangle_{\!L}|1,0\rangle_{\!S} + \frac{1}{\sqrt{6}}\,|1,-1\rangle_{\!L}|1,1\rangle_{\!S}\right) + \\
&\quad + \frac{e^{2i\omega t}}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,1\rangle_{\!L}|1,-1\rangle_{\!S} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,-1\rangle_{\!L}|1,1\rangle_{\!S}\right) + \\
&+ \frac{e^{3i\omega t}}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,|1,1\rangle_{\!L}|1,-1\rangle_{\!S} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1,0\rangle_{\!L}|1,0\rangle_{\!S} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1,-1\rangle_{\!L}|1,1\rangle_{\!S}\right) = \\
&= \left(\frac{1}{6} + \frac{e^{2i\omega t}}{2} + \frac{e^{3i\omega t}}{3}\right)|1,1\rangle_{\!L}|1,-1\rangle_{\!S} + \left(\frac{1}{3} - \frac{e^{3i\omega t}}{3}\right)|1,0\rangle_{\!L}|1,0\rangle_{\!S} + \\
&\quad + \left(\frac{1}{6} - \frac{e^{2i\omega t}}{2} + \frac{e^{3i\omega t}}{3}\right)|1,-1\rangle_{\!L}|1,1\rangle_{\!S}\,.
\end{aligned}
$$

A questo punto i possibili valori di una misura dell'osservabile L_z si ricavano dai secondi numeri quantici nei ket $|l,l_z\rangle_L$, ovvero sono i valori $L_z = \hbar, 0, -\hbar$ che si ottengono con probabilità rispettivamente

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(\hbar) &= \left|\frac{1}{6} + \frac{e^{2i\omega t}}{2} + \frac{e^{3i\omega t}}{3}\right|^2 = \frac{7}{18} + \frac{\cos\omega t}{3} + \frac{\cos 2\omega t}{6} + \frac{\cos 3\omega t}{9}\,, \\
\mathcal{P}(0) &= \left|\frac{1}{3} - \frac{e^{3i\omega t}}{3}\right|^2 = \frac{2}{9} - \frac{2\cos 3\omega t}{9}\,, \\
\mathcal{P}(-\hbar) &= \left|\frac{1}{6} - \frac{e^{2i\omega t}}{2} + \frac{e^{3i\omega t}}{3}\right|^2 = \frac{7}{18} - \frac{\cos\omega t}{3} - \frac{\cos 2\omega t}{6} + \frac{\cos 3\omega t}{9}\,.
\end{aligned}
$$

Il valor medio di L_z sullo stato $|\psi,t\rangle$ è infine

$$
\langle L_z\rangle(t) = \langle\psi,t|L_z|\psi,t\rangle = \hbar\mathcal{P}(\hbar) + 0\mathcal{P}(0) + (-\hbar)\mathcal{P}(-\hbar) = 2\left(\frac{\cos\omega t}{3} + \frac{\cos 2\omega t}{6}\right)\hbar,
$$

che vale $\hbar$ per $t = 0$ perché in $t = 0$, come si ricava da $|\psi,0\rangle$, il valore della misura dell'osservabile L_z è $L_z = \hbar$ con probabilità 1.

Esercizio 2. Un rotatore quantistico di momento d'inerzia I è descritto dall'hamiltoniana

$$
H = \frac{\boldsymbol{L}^2}{2I} + gBL_z,
$$

dove B è il valore di un campo magnetico orientato secondo l'asse z e gL_z è il momento magnetico del rotatore. All'istante iniziale $t = 0$ il rotatore si trova in un autostato di $\boldsymbol{L}^2$ con autovalore $2\hbar^2$ e in un autostato di $(L_x + L_z)/\sqrt{2}$ con autovalore $\hbar$. Si calcoli il valor medio dell'energia e il valor medio di L_x in funzione del tempo.

Soluzione dell'esercizio 2. Poiché in $t = 0$ il rotatore si trova in un autostato di $\boldsymbol{L}^2$ con autovalore $2\hbar^2$, deduciamo che il sistema si trova nel sottospazio generato dalla base $\mathcal{B} = \{\, |1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle \,\}$, in cui l'operatore $\boldsymbol{L}^2$ agisce come operatore identità[1].

[1]Il contenuto di questa nota non ha la pretesa di essere comprensibile e forse apparirà alquanto sibillino. Il motivo per cui nel sottospazio generato dalla base $\mathcal{B}$ l'operatore $\boldsymbol{L}^2$ agisce come identità si comprende nell'ambito della teoria dei gruppi, ancora non meglio illustrata. Poiché $\boldsymbol{L}^2$ commuta con le tre componenti L_i, che appunto nella teoria dei gruppi sono i generatori del gruppo delle rotazioni, o, per meglio dire, sono i generatori della rappresentazione del gruppo delle rotazioni, segue allora, in virtù di quello che viene chiamato *lemma di Schur*, che $\boldsymbol{L}^2$ è multiplo dell'identità

Poiché dunque qualsiasi vettore del sottospazio di base $\mathcal{B}$ risulta essere autovettore di $\boldsymbol{L}^2$, segue che in tale sottospazio l'autovettore, ovvero lo stato iniziale $|\psi, 0\rangle$, viene determinato univocamente dalla richiesta che esso sia autostato anche del secondo operatore $A = (L_x + L_z)/\sqrt{2}$ relativo all'autovalore $\lambda = \hbar$.

La matrice associata all'operatore A relativamente alla base $\mathcal{B}$ è

$$A = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

che possiede in effetti l'autovalore $\lambda = \hbar$ a cui corrisponde l'autovettore normalizzato

$$|\psi, 0\rangle = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)|1,1\rangle + \frac{1}{2}|1,0\rangle + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)|1,-1\rangle,$$

coincidente quindi con lo stato iniziale. Tale stato iniziale non è autostato dell'hamiltoniana, ma solo combinazione lineare di autostati dell'hamiltoniana relativi agli autovalori rispettivamente $\mathcal{E}_+ = \hbar^2/I + gB\hbar$, $\mathcal{E}_0 = \hbar^2/I$, $\mathcal{E}_- = \hbar^2/I - gB\hbar$ perché valgono le equazioni secolari

$$H|1,1\rangle = \left(\frac{\hbar^2}{I} + gB\hbar\right)|1,1\rangle, \quad H|1,0\rangle = \frac{\hbar^2}{I}|1,0\rangle, \quad H|1,-1\rangle = \left(\frac{\hbar^2}{I} - gB\hbar\right)|1,-1\rangle.$$

Segue pertanto lo stato al tempo $t > 0$

$$|\psi, t\rangle = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)e^{-i\omega t}|1,1\rangle + \frac{1}{2}|1,0\rangle + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)e^{i\omega t}|1,-1\rangle,$$

dove è stato trascurato un fattore di fase scritto a fattor comune e si è posto $\omega = gB$.

Il valor medio dell'energia (coincidente, come sappiamo, con quello calcolato in $t = 0$) è pertanto $\langle H\rangle = \sum \mathcal{E}_i \mathbb{P}(\mathcal{E}_i)$ dato da

$$\langle H\rangle = \left(\frac{\hbar^2}{I} + gB\hbar\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{\hbar^2}{4I} + \left(\frac{\hbar^2}{I} - gB\hbar\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{\hbar^2}{I} + \frac{gB\hbar}{\sqrt{2}}.$$

Per calcolare il valor medio di L_x sullo stato $|\psi, t\rangle$, calcoliamo

$$L_x|\psi, t\rangle = L_x\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)e^{-i\omega t}|1,1\rangle + \frac{1}{2}|1,0\rangle + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)e^{i\omega t}|1,-1\rangle\right] =$$

$$= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\left[|1,1\rangle + (2\cos\omega t - i\sqrt{2}\sin\omega t)|1,0\rangle + |1,-1\rangle\right],$$

da cui segue in conclusione il valor medio di L_x sullo stato $|\psi, t\rangle$

$$\langle L_x\rangle = \langle\psi, t|L_x|\psi, t\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\cos\omega t.$$

Esercizio 3. Un elettrone è vincolato a muoversi su una superficie sferica di raggio R ed è soggetto ad un campo magnetico diretto lungo l'asse x. L'hamiltoniana del sistema è

$$H = \frac{\boldsymbol{L}^2}{2mR^2} + \frac{\mu B}{\hbar}(L_x + 2S_x)$$

e all'istante iniziale $t = 0$ lo stato del sistema è descritto dallo spinore

$$|\psi, 0\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Determinare:

1) lo stato al generico istante di tempo $t > 0$;

2) i possibili risultati e le rispettive probabilità, in funzione del tempo, di una misura di L_z e J_z, dove J_z è la componente z del momento angolare totale $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$.

Soluzione dell'esercizio 3. Scriviamo l'hamiltoniana nella forma equivalente

$$H = \frac{\alpha}{2\hbar^2}\,\boldsymbol{L}^2 + \frac{g}{2\hbar}(L_x + 2S_x)$$

e lo stato iniziale nella forma

$$|\psi, 0\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad |\psi, 0\rangle = \cos\theta \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \cos\theta \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

che in termini di armoniche sferiche si scrive come combinazione lineare normalizzata

$$|\psi, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1, 0\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1, 0\rangle \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Per scrivere lo stato al tempo $t > 0$, dobbiamo esprimere lo stato iniziale come combinazione lineare di autostati dell'hamiltoniana.

Nella base $\mathcal{B}_L = \{|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle\}$, gli autovalori dell'operatore

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sono $\lambda = \hbar, 0, -\hbar$, a cui corrispondono gli autovettori normalizzati rispettivamente

$$|L_x^+\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}, \qquad |L_x^0\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad |L_x^-\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Segue dunque

$$|1, 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|L_x^+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|L_x^-\rangle.$$

Analogamente, nella base

$$\mathcal{B}_S = \left\{ \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \right\},$$

gli autovalori dell'operatore

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sono $\lambda = \hbar/2, -\hbar/2$, a cui corrispondono gli autovettori normalizzati rispettivamente

$$|S_x^+\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad |S_x^-\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Abbiamo dunque

$$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_x^+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|S_x^-\rangle$$

e

$$\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_x^+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|S_x^-\rangle,$$

da cui, se sostituiamo nello stato iniziale, segue

$$|\psi, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle\left[\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle\right],$$

ovvero

$$|\psi, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|L_x^+\rangle|S_x^+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|L_x^-\rangle|S_x^+\rangle.$$

Dalle equazioni secolari

$$H|L_x^+\rangle|S_x^+\rangle = (\alpha + g)|L_x^+\rangle|S_x^+\rangle \qquad \text{e} \qquad H|L_x^-\rangle|S_x^+\rangle = \alpha|L_x^-\rangle|S_x^+\rangle$$

segue lo stato al tempo $t > 0$ (con $\omega = g/\hbar$ e la semplificazione di un fattore di fase globale)

$$|\psi, t\rangle = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}}|L_x^+\rangle|S_x^+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|L_x^-\rangle|S_x^+\rangle.$$

Con la sostituzione di

$$|L_x^+\rangle = \frac{1}{2}|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{1}{2}|1,-1\rangle \qquad \text{e} \qquad |L_x^-\rangle = \frac{1}{2}|1,1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{1}{2}|1,-1\rangle$$

e

$$|S_x^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle,$$

si ottiene lo stato al tempo t in termini di autostati di L_z, S_z

$$\begin{aligned} |\psi, t\rangle = &\left(\frac{e^{-i\omega t} - 1}{4}\right)|1,1\rangle\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \left(\frac{e^{-i\omega t} - 1}{4}\right)|1,1\rangle\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle + \\ &+ \left(\frac{e^{-i\omega t} + 1}{2\sqrt{2}}\right)|1,0\rangle\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \left(\frac{e^{-i\omega t} + 1}{2\sqrt{2}}\right)|1,0\rangle\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle + \\ &+ \left(\frac{e^{-i\omega t} - 1}{4}\right)|1,-1\rangle\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + \left(\frac{e^{-i\omega t} - 1}{4}\right)|1,-1\rangle\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle. \end{aligned}$$

A questo punto, una misura di L_z può dare i risultati

$$l_z = \hbar \quad \text{con probabilità} \quad \mathbb{P}(\hbar) = 2\left|\frac{e^{-i\omega t}-1}{4}\right|^2 = \frac{1-\cos\omega t}{4}\,,$$

$$l_z = 0 \quad \text{con probabilità} \quad \mathbb{P}(0) = 2\left|\frac{e^{-i\omega t}+1}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1+\cos\omega t}{2}\,,$$

$$l_z = -\hbar \quad \text{con probabilità} \quad \mathbb{P}(\hbar) = 2\left|\frac{e^{-i\omega t}-1}{4}\right|^2 = \frac{1-\cos\omega t}{4}\,.$$

Per determinare i valori di una misura di J_z, esprimiamo lo stato $|\psi, t\rangle$ nella base degli autostati simultanei $|l, s; j, j_z\rangle$ degli operatori $\boldsymbol{L}^2, \boldsymbol{S}^2, \boldsymbol{J}^2, J_z$.

Utilizzando i coefficienti di Clebsch-Gordan, otteniamo

$$|\psi, t\rangle = \left(\frac{e^{-i\omega t}-1}{4}\right)\left|1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle + \left(\frac{3e^{-i\omega t}+1}{4\sqrt{3}}\right)\left|1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}\left|1, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle +$$

$$+ \left(\frac{3e^{-i\omega t}+1}{4\sqrt{3}}\right)\left|1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle + \left(\frac{e^{-i\omega t}-1}{4}\right)\left|1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}\left|1, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle,$$

da cui si deducono i valori e le probabilità di una misura di J_z

$$J_z = \frac{3}{2}\hbar \quad \text{con probabilità} \quad \mathbb{P}\left(\frac{3}{2}\hbar\right) = \left|\frac{e^{-i\omega t}-1}{4}\right|^2 = \frac{1-\cos\omega t}{8}\,,$$

$$J_z = \frac{\hbar}{2} \quad \text{con probabilità} \quad \mathbb{P}\left(\frac{\hbar}{2}\right) = \left|\frac{3e^{-i\omega t}+1}{4\sqrt{3}}\right|^2 + \frac{1}{6} = \frac{3+\cos\omega t}{8}\,,$$

$$J_z = -\frac{\hbar}{2} \quad \text{con probabilità} \quad \mathbb{P}\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = \left|\frac{3e^{-i\omega t}+1}{4\sqrt{3}}\right|^2 + \frac{1}{6} = \frac{3+\cos\omega t}{8}\,,$$

$$J_z = -\frac{3}{2}\hbar \quad \text{con probabilità} \quad \mathbb{P}\left(-\frac{3}{2}\hbar\right) = \left|\frac{e^{-i\omega t}-1}{4}\right|^2 = \frac{1-\cos\omega t}{8}\,.$$