Esame di MATEMATICA CORSO BASE del ____________

Cognome ________________________ **Nome** ____________________

Matricola ____________________

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ x - ky + 2z = k \\ kx - y - z = -1 \end{cases}$$

Si trovino il numero delle soluzioni al variare del parametro k e le soluzioni esplicite

1) Per $k = 0$ o $k = 4$ il sistema non ha soluzioni.
2) Per $k \neq 0$ e $k \neq 4$ il sistema ha soluzione unica

$$x = \frac{16}{k^2 - 4k}\,, \qquad y = \frac{-k^2 + 8k + 8}{k^2 - 4k}\,, \qquad z = \frac{2k^2 + 4k - 8}{k^2 - 4k}$$

Esercizio 2. Relativamente alla seguente funzione

$$f(x) = \frac{2x - 5}{(3x - 1)^2}\,,$$

determinare:

dominio $\quad \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$

intersezioni con gli assi cartesiani $\quad A\left(\frac{5}{2}, 0\right), \quad B(0, -5)$

segno $\quad f(x) < 0 \;\; \textit{per} \;\; x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right); \qquad f(x) > 0 \;\; \textit{per} \;\; x > \frac{5}{2}$

singolarità $\quad \lim_{x \to 1/3^{\pm}} f(x) = -\infty$

comportamento all'infinito $\quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

equazioni cartesiane degli asintoti $\quad x = \frac{1}{3}$ (*verticale*); $\qquad y = 0$ (*orizzontale*)

intersezione tra la funzione e i suoi asintoti $\quad A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ *con l'asintoto orizzontale*

derivata prima e suo segno $\quad f'(x) = \frac{28 - 6x}{(3x - 1)^3}\,; \quad f'(x) < 0 \;\; \textit{per} \;\; x < \frac{1}{3}$ o $x > \frac{14}{3}$;
$f'(x) > 0 \;\; \textit{per} \;\; \frac{1}{3} < x < \frac{14}{3}$

intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente $f(x)$ *crescente per* $\frac{1}{3} < x < \frac{14}{3}$; *decrescente per* $x < \frac{1}{3}$ *o* $x > \frac{14}{3}$

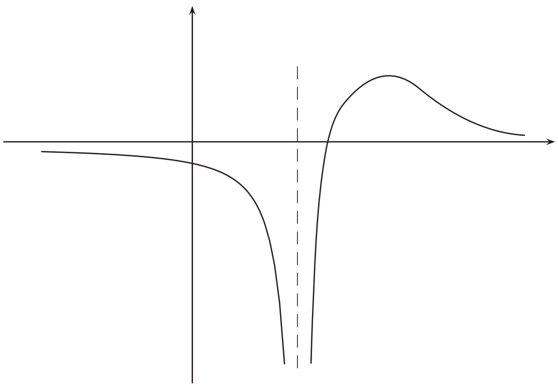
punti di massimo e minimo locali $\left(\frac{14}{3}, \frac{1}{39}\right)$ *è punto di massimo locale*

derivata seconda e suo segno $f''(x) = \dfrac{36x - 246}{(3x-1)^4}$; $f''(x) < 0$ *per* $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{41}{6}\right)$; $f''(x) > 0$ *per* $x > \frac{41}{6}$

punti di flesso $\left(\frac{41}{6}, \frac{8}{351}\right)$

equazioni delle rette tangenti nei punti di flesso $y = \dfrac{8}{351} - \dfrac{8}{4563}\left(x - \dfrac{41}{6}\right)$

grafico



Esercizio 3. Risolvere il seguente integrale:

$$\int_1^2 \frac{2x+1}{(x^2+x)^5}\, dx$$

Soluzione: $\dfrac{5}{324}$

Esercizio 4. Si scriva il polinomio di Taylor di terzo grado della seguente funzione nel punto $x_0 = 0$

$$f(x) = \frac{2x+1}{3x-4}$$

Soluzione: $-\dfrac{1}{4} - \dfrac{11}{16}\,x - \dfrac{33}{64}\,x^2 - \dfrac{99}{256}\,x^3$

Esame di MATEMATICA CORSO BASE del ____________

Cognome ______________________________ **Nome** __________________________

Matricola __________________________

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} kx - 2y - z = 4 \\ 8x - ky - 2z = k \end{cases}$$

Si trovino il numero delle soluzioni al variare del parametro k e le soluzioni esplicite

1) Per $k = 4$ il sistema non ha soluzioni
2) Per $k \neq 4$ il sistema ha ∞^1 soluzioni

$$x = t\,, \qquad y = \frac{8-k}{k-4} - 2t\,, \qquad z = \frac{k^2t - 16t - 2k}{k-4}$$

Esercizio 2. Relativamente alla seguente funzione

$$f(x) = \frac{\log(2x-7)}{(7-2x)^3} - 3$$

determinare:

dominio $\left(\frac{7}{2}\,, \infty\right)$

intersezioni con gli assi cartesiani $A\,(x_0, 0)\,,$ dove $\frac{7}{2} < x_0 < 4$ (*con l'asse* x)

segno $f(x) > 0$ *per* $x \in \left(\frac{7}{2}\,, x_0\right)$; $f(x) < 0$ *per* $x > x_0$

singolarità $\lim_{x \to 7/2^+} f(x) = \infty$

comportamento all'infinito $\lim_{x \to \infty} f(x) = -3$

equazioni cartesiane degli asintoti $x = \frac{7}{2}$ (*verticale*); $y = -3$ (*orizzontale a destra*)

intersezione tra la funzione e i suoi asintoti $A\,(4, -3)$ *con l'asintoto orizzontale*

derivata prima e suo segno $f'(x) = \dfrac{6\log(2x-7) - 2}{(7-2x)^4}$; $f'(x) < 0$ *per* $\frac{7}{2} < x < \frac{7+e^{1/3}}{2}$; $f'(x) > 0$ *per* $x > \frac{7+e^{1/3}}{2}$

intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente $\quad f(x)$ *decrescente per* $\frac{7}{2} < x < \frac{7+e^{1/3}}{2}$; *crescente per* $x > \frac{7+e^{1/3}}{2}$

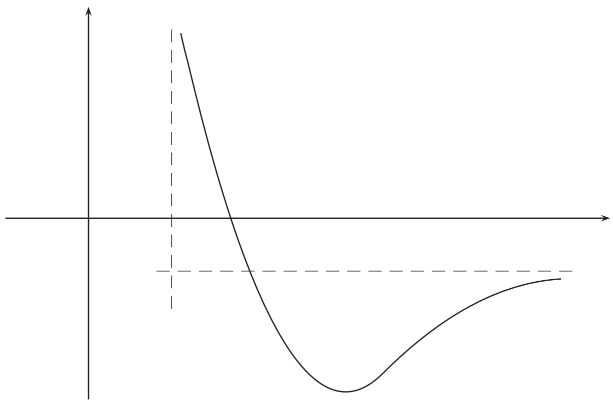
punti di massimo e minimo locali $\quad \left(\frac{7+e^{1/3}}{2}, \frac{-1-9e}{3e}\right)$ *è punto di minimo locale (e assoluto)*

derivata seconda e suo segno $\quad f''(x) = \dfrac{48\log(2x-7)-28}{(7-2x)^5}$; $\quad f''(x) > 0$ *per* $\frac{7}{2} < x < \frac{7+e^{7/12}}{2}$; $f''(x) < 0$ *per* $x > \frac{7+e^{7/12}}{2}$

punti di flesso $\quad \left(\frac{7+e^{7/12}}{2}, \frac{-7-36e^{7/4}}{12e^{7/4}}\right)$

equazioni delle rette tangenti nei punti di flesso $\quad y = \dfrac{-7-36e^{7/4}}{12e^{7/4}} + \dfrac{3}{2e^{7/3}}\left(x - \dfrac{7+e^{7/12}}{2}\right)$

grafico



Esercizio 3. Risolvere il seguente integrale:

$$\int_1^2 e^{x^2-2x}\,(x-1)\,dx$$

Soluzione: $\quad \dfrac{e-1}{2e}$

Esercizio 4. Tramite applicazione del **teorema degli zeri delle funzioni continue**, trovare, se esistono, due numeri interi consecutivi a, b tra i quali esista uno zero, indicato con x_0, della funzione

$$f(x) = x^3 + e^x.$$

Spiegare brevemente perché risulta $a < x_0 < b$.

Soluzione: Poiché la $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso $[-1, 0]$ e risulta $f(-1) = (1-e)/e < 0$ e $f(0) = 1 > 0$, segue che tra i due numeri interi consecutivi $-1, 0$, in virtù del teorema degli zeri delle funzioni continue, esiste x_0 (ovvero $-1 < x_0 < 0$) che è uno zero della funzione $f(x)$, cioè x_0 fornisce $f(x_0) = 0$.

Esame di MATEMATICA CORSO BASE del ____________

Cognome ______________________________ **Nome** ________________________

Matricola ________________________

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ kx + 2y = 4 \\ 9x + 3y = k \end{cases}$$

Si trovino il numero delle soluzioni al variare del parametro k e le soluzioni esplicite

1) Per $k \neq 6$ il sistema non ha soluzioni
2) Per $k = 6$ il sistema ha ∞^1 soluzioni

$$x = \frac{2-\alpha}{3}\,, \qquad y = \alpha$$

Esercizio 2. Relativamente alla seguente funzione

$$f(x) = \left(2x - x^2\right) e^{3-2x}$$

determinare:

dominio $\qquad (-\infty, \infty)$

intersezioni con gli assi cartesiani $\qquad (0,0)\,, \quad (2,0)$

segno $\qquad f(x) > 0$ *per* $x \in (0,2)$; $\qquad f(x) < 0$ *per* $x < 0$ *oppure* $x > 2$

singolarità $\qquad$ *la funzione non ha singolarità*

comportamento all'infinito $\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,; \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

equazioni cartesiane degli asintoti $\qquad y = 0$ (*orizzontale a destra*)

intersezione tra la funzione e i suoi asintoti $\qquad (0,0)\,, \quad (2,0)$ *con l'asintoto orizzontale*

derivata prima e suo segno $\qquad f'(x) = \left(2x^2 - 6x + 2\right) e^{3-2x}\,; \quad f'(x) < 0$ *per* $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $f'(x) > 0$ *per* $x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ oppure $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente $\qquad f(x)$ *decrescente per* $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; *crescente per* $x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ oppure $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

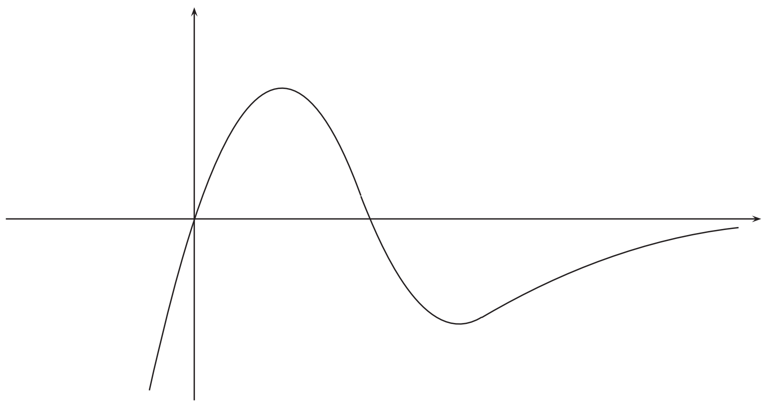
punti di massimo e minimo locali $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\,,\ f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$ *è punto di massimo locale*; $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,,\ f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$ *è punto di minimo locale*

derivata seconda e suo segno $f''(x) = (-4x^2 + 16x - 10)\ e^{3-2x}$;
$f''(x) > 0$ *per* $\frac{4-\sqrt{6}}{2} < x < \frac{4+\sqrt{6}}{2}$; $f''(x) < 0$ *per* $x < \frac{4-\sqrt{6}}{2}$ oppure $x > \frac{4+\sqrt{6}}{2}$

punti di flesso $\left(\frac{4-\sqrt{6}}{2}, f\left(\frac{4-\sqrt{6}}{2}\right)\right)$ e $\left(\frac{4+\sqrt{6}}{2}, f\left(\frac{4+\sqrt{6}}{2}\right)\right)$

equazioni delle rette tangenti nei punti di flesso $y = f\left(\frac{4 \pm \sqrt{6}}{2}\right) + f'\left(\frac{4 \pm \sqrt{6}}{2}\right)\left(x - \frac{4 \pm \sqrt{6}}{2}\right)$

grafico



Esercizio 3. Risolvere il seguente integrale:

$$\int_2^3 \frac{x}{2x^2 - 3x + 1}\, dx$$

Soluzione: $\log \sqrt{\frac{12}{5}}$

Esercizio 4. Stabilire se la funzione

$$f(x) = x + e^{-x}$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange relativamente all'intervallo $[0, 1]$ e, in caso affermativo, determinare il punto $c \in (0, 1)$ di cui alla tesi del teorema di Lagrange.

Soluzione: Poiché la $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso $[0, 1]$ e derivabile nell'intervallo aperto $(0, 1)$, segue che la $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange. Il punto c vale allora $c = 1 - \log(e - 1)$.

Esame di MATEMATICA CORSO BASE del ___________

Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 3x - y = k \\ kx + y = -1 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

Si trovino il numero delle soluzioni al variare del parametro k e le soluzioni esplicite

1) Per $k \neq 2$ e $k \neq -\frac{5}{3}$ il sistema non ha soluzioni
2) Per $k = 2$ oppure $k = -\frac{5}{3}$ il sistema ha soluzione unica.

$$Per\ k = 2: \ x = \frac{1}{5}, \ y = -\frac{7}{5}; \qquad Per\ k = -\frac{5}{3}: \ x = -2, \ y = -\frac{13}{3}$$

Esercizio 2. Relativamente alla seguente funzione

$$f(x) = (3x - 2)\, e^{2x}$$

determinare:

dominio $(-\infty, \infty)$

intersezioni con gli assi cartesiani $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$, $(0, -2)$

segno $f(x) > 0$ *per* $x > \frac{2}{3}$; $f(x) < 0$ *per* $x < \frac{2}{3}$

singolarità *la funzione non ha singolarità*

comportamento all'infinito $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

equazioni cartesiane degli asintoti $y = 0$ (*orizzontale a sinistra*)

intersezione tra la funzione e i suoi asintoti $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$, *con l'asintoto orizzontale*

derivata prima e suo segno $f'(x) = (6x - 1)\, e^{2x}$; $f'(x) < 0$ *per* $x < \frac{1}{6}$;
$f'(x) > 0$ *per* $x > \frac{1}{6}$

intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente $f(x)$ *decrescente per* $x < \frac{1}{6}$;
crescente per $x > \frac{1}{6}$

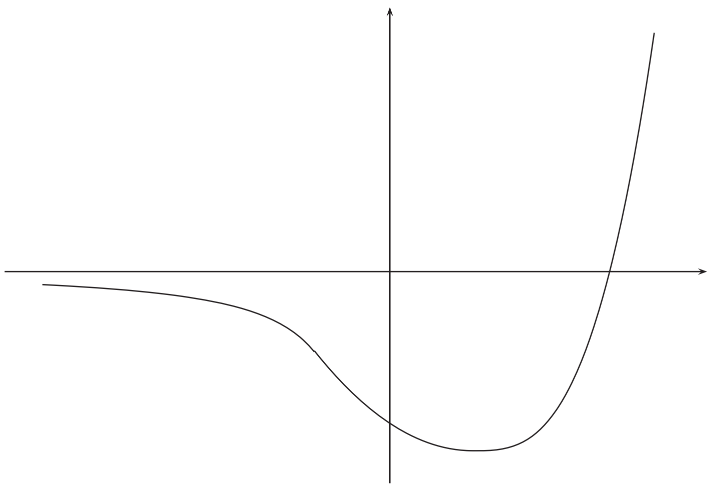
punti di massimo e minimo locali $\left(\frac{1}{6}\,,\,-\frac{3e^{1/3}}{2}\right)$ *è punto di minimo locale*;

derivata seconda e suo segno $f''(x) = (12x+4)\ e^{2x}\,;\quad f''(x) < 0\ \ \textit{per}\ \ x < -\frac{1}{3}$;
$f''(x) > 0\ \ \textit{per}\ \ x > -\frac{1}{3}$

punti di flesso $\left(-\frac{1}{3}, -3e^{-2/3}\right)$

equazioni delle rette tangenti nei punti di flesso $y = -3e^{-2/3} - 3e^{-2/3}\left(x + \dfrac{1}{3}\right)$

grafico



Esercizio 3. Risolvere il seguente integrale:

$$\int_1^2 x\log(2x-1)\,dx$$

Soluzione: $\dfrac{15\log 3}{8} - 1$

Esercizio 4. Dimostrare la validità del limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x-1} = \infty$$

scrivendo la disuguaglianza relativa alla funzione e determinando un opportuno insieme delle x che soddisfino tale disuguaglianza

Soluzione: Poiché per ogni $M > 0$ la disuguaglianza $\dfrac{x^2}{2x-1} > M$ è soddisfatta dalle $x > 2M$, risulta dimostrato il limite dato.

Esame di MATEMATICA CORSO BASE del ___________

Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ____________________

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} kx + 3\,y + z = -3 \\ 12x + ky + 2z = -k \end{cases}$$

Si trovino il numero delle soluzioni al variare del parametro k e le soluzioni esplicite

1) Per $k \neq 6$ il sistema ha ∞^1 soluzioni
2) Per $k = 6$ il sistema ha ∞^2 soluzioni. *Per* $k = 6: \quad x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = -3 - 6\alpha - 3\beta$

$$Per\ k \neq 6: \quad x = \alpha\,, \quad y = 2\alpha - 1, \quad z = \frac{k^2\alpha - 36\alpha}{6 - k}$$

Esercizio 2. Relativamente alla seguente funzione

$$f(x) = \frac{7x - 4}{2x^2 - x}$$

determinare:

dominio $\quad (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

intersezioni con gli assi cartesiani $\quad \left(\frac{4}{7}, 0\right)$

segno $\quad f(x) < 0$ *per* $x < 0$ *oppure* $\frac{1}{2} < x < \frac{4}{7}$; $\quad f(x) > 0$ *per* $0 < x < \frac{1}{2}$ *oppure* $x > \frac{4}{7}$

singolarità $\quad \lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \pm\infty\,, \quad \lim_{x \to 1/2^\pm} f(x) = \mp\infty$

comportamento all'infinito $\quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

equazioni cartesiane degli asintoti $\quad x = 0, \quad x = \frac{1}{2}$ (*verticali*); $\quad y = 0$ (*orizzontale*)

intersezione tra la funzione e i suoi asintoti $\quad \left(\frac{4}{7}, 0\right)$, *con l'asintoto orizzontale*

derivata prima e suo segno $\quad f'(x) = \dfrac{-14x^2 + 16x - 4}{(2x^2 - x)^2}$; $\quad f'(x) < 0$ *per* $x < 0$
oppure $0 < x < \frac{4-\sqrt{2}}{7}$ *oppure* $x > \frac{4+\sqrt{2}}{7}$; $\quad f'(x) > 0$ *per* $\frac{4-\sqrt{2}}{7} < x < \frac{4+\sqrt{2}}{7}$, *con* $x \neq \frac{1}{2}$

intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente $\quad f(x)$ *decrescente per* $x < 0$
oppure $0 < x < \frac{4-\sqrt{2}}{7}$ *oppure* $x > \frac{4+\sqrt{2}}{7}$; *crescente per* $\frac{4-\sqrt{2}}{7} < x < \frac{4+\sqrt{2}}{7}$, *con* $x \neq \frac{1}{2}$

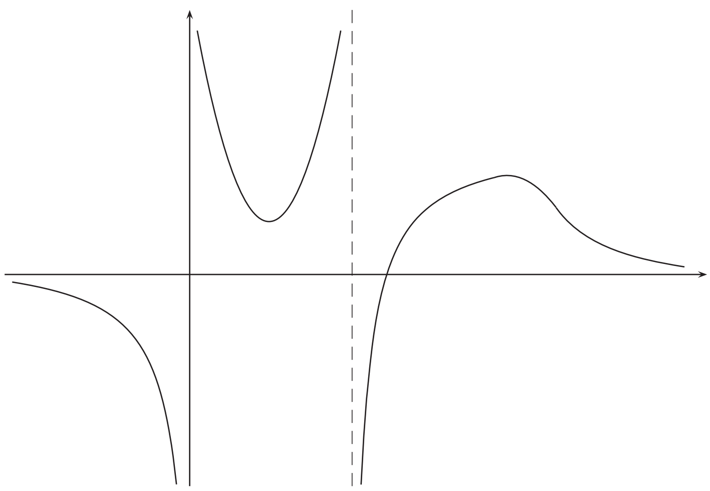
punti di massimo e minimo locali $\left(\frac{4-\sqrt{2}}{7}\,,\ f\left(\frac{4-\sqrt{2}}{7}\right)\right)$ *è punto di minimo locale*; $\left(\frac{4+\sqrt{2}}{7}\,,\ f\left(\frac{4+\sqrt{2}}{7}\right)\right)$ *è punto di massimo locale*

derivata seconda e suo segno $f''(x) = \dfrac{56x^3 - 96x^2 + 48x - 8}{(2x^2 - x)^3}$; $f''(x) < 0$ *per* $x < 0$ *oppure* $\frac{1}{2} < x < 1$; $f''(x) > 0$ *per* $0 < x < \frac{1}{2}$ *oppure* $x > 1$

punti di flesso $(1, 3)$

equazioni delle rette tangenti nei punti di flesso $y = -2x + 5$

grafico



Esercizio 3. Risolvere il seguente integrale:

$$\int_0^{(e-1)/2} \frac{\log(2x+1)}{2x+1}\,dx$$

Soluzione: $\dfrac{1}{4}$

Esercizio 4. Dimostrare la validità del limite

$$\lim_{x \to 1/2^-} \frac{x^2}{2x-1} = -\infty$$

scrivendo la disuguaglianza relativa alla funzione e determinando un opportuno insieme delle x che soddisfino tale disuguaglianza

Soluzione: Poiché per ogni $M > 0$ la disuguaglianza $\dfrac{x^2}{2x-1} < -M$ è soddisfatta dalle x tali che $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{16M} < x < \dfrac{1}{2}$, risulta dimostrato il limite dato.

Esame di MATEMATICA CORSO BASE del ______

Cognome ______ **Nome** ______

Matricola ______

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x + ky - 3z = k \\ kx + 6y - z = -2 \end{cases}$$

Si trovino il numero delle soluzioni al variare del parametro k e le soluzioni esplicite

1) Per $k = 5$ il sistema non ha soluzioni.
2) Per $k = -4$ il sistema ha ∞^1 soluzioni $x = 8 - 11\alpha\,,\quad y = 5 - 7\alpha\,,\quad z = 2\alpha$
3) Per $k \neq -4$ e $k \neq 5$ il sistema ha soluzione unica

$$x = \frac{6}{5-k}\,, \qquad y = \frac{k+1}{k-5}\,, \qquad z = \frac{2k-4}{k-5}$$

Esercizio 2. Relativamente alla seguente funzione

$$f(x) = \frac{15 - 7x}{x^2 - 3x + 2}$$

determinare (si utilizzi l'identità $7x^3 - 45x^2 + 93x - 63 = (x-3)(7x^2 - 24x + 21)$ ove occorra):

dominio ______

intersezioni con gli assi cartesiani ______

segno ______

singolarità ______

comportamento all'infinito ______

equazioni cartesiane degli asintoti ______

intersezione tra la funzione e i suoi asintoti ______

derivata prima e suo segno $\quad f'(x) = \dfrac{7x^2 - 30x + 31}{(x^2 - 3x + 2)^2}$

intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente

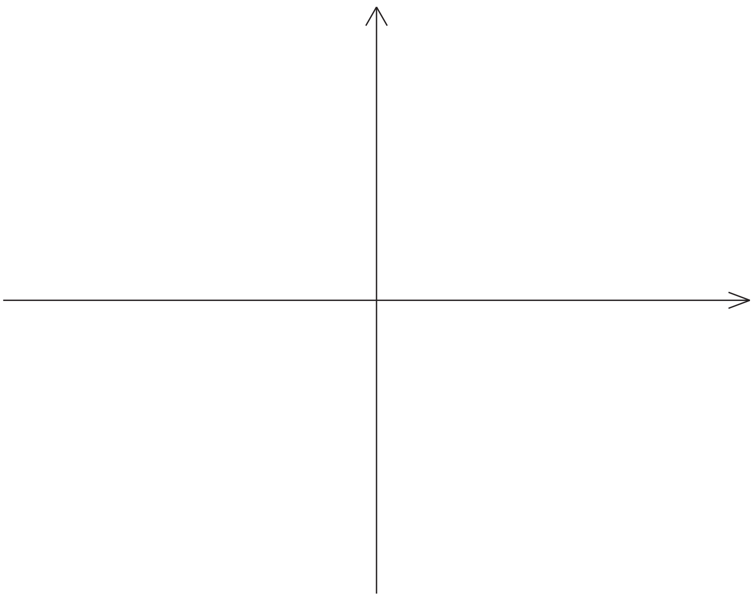
punti di massimo e minimo locali

derivata seconda e suo segno $$f''(x) = \frac{-2(7x^3 - 45x^2 + 93x - 63)}{(x^2 - 3x + 2)^3}$$

punti di flesso

equazioni delle rette tangenti nei punti di flesso

grafico



Esercizio 3. Risolvere il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{1}{3 + 2\sqrt{x}}\,dx$$

Soluzione: $1 - \log\sqrt{\frac{125}{27}}$

Esercizio 4. Data la funzione

$$f(x) = \log(2x + 3)$$

e i valori $x_0 = 0$ e $x = 1$, determinare il punto c di cui alla tesi del **teorema della formula di Taylor**, sviluppando il polinomio di Taylor fino al grado $n = 1$.

Soluzione: $c = \sqrt{\frac{3}{4 - 6\log(5/3)}} - \frac{3}{2}$