

Matematica corso base

Prova scritta (Prima parte) del ____/____/____ Numero compito: XXX

Cognome (Stamp. Maiuscolo): _____ Nome: _____

Matricola: _____

Punteggio. Domanda: +2 per risposta giusta, 0 per risposta errata o mancante. Per ciascuno degli Esercizi da 0 a +4 (2+2).

Domanda: Se l'insieme di vettori $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ha rango 3 allora:

- ☐ **A** comunque si prendano tre dei quattro vettori sono linearmente indipendenti
- ☐ **B** è sempre possibile prendere tre dei quattro vettori in modo che siano linearmente dipendenti
- ☐ **C** anche $\{a_1, a_2, a_3\}$ ha rango 3
- ☐ **D** è sempre possibile esprimere in modo univoco uno dei vettori come combinazione lineare dei rimanenti tre
- ☐ **E** almeno tre dei quattro vettori sono linearmente indipendenti

Avvertenza: Per i due esercizi che seguono riporta in questo foglio prestampato **solo i risultati finali semplificati**, relativi alle voci indicate. I procedimenti usati per arrivare a tali risultati debbono essere presenti in modo ordinato e leggibile nei fogli protocollo assegnati: **la brutta copia verrà presa in considerazione esclusiva mente nel caso in cui i corrispondenti risultati finali siano riportati in questo foglio prestampato.**

Esercizio 1: Risolvi il sistema che segue, indicando esplicitamente come varia il numero delle sue soluzioni al variare del parametro k :

$$\begin{cases} kx - 2y - z = 4 \\ 8x - ky - 2z = k \end{cases}$$

1. Numero delle soluzioni al variare di k

Se $k = 4 \Rightarrow$ il sistema non ha soluzioni;

Se $k \neq 4 \Rightarrow$ il sistema ha ∞^1 soluzioni

2. Espressione esplicita delle soluzioni in funzione di k

Per $k \neq 4$ si hanno le ∞^1 soluzioni

$$x = \alpha, \quad y = \frac{8-k}{k-4} - 2\alpha, \quad z = \frac{k^2\alpha - 16\alpha - 2k}{k-4}$$

RETRO -----> >>> >

Esercizio 2: Calcola gli autovalori e gli autovettori di norma unitaria della matrice:

$$M = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. autovalori:

$$\lambda = -7$$

$$\lambda = 2$$

$$\lambda = 6$$

b. autovettori normalizzati::

$$\lambda = -7 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \left(-\frac{4}{\sqrt{17}}, 0, \frac{1}{\sqrt{17}} \right)$$

$$\lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\lambda = 6 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w} = (0, 1, 0)$$

Matematica corso base

Prova scritta (Prima parte) del ____/____/____ Numero compito: XXX

Cognome (Stamp. Maiuscolo): _____ Nome: _____

Matricola: _____

Punteggio. Domanda: +2 per risposta giusta, 0 per risposta errata o mancante. Per ciascuno degli Esercizi da 0 a +4 (2+2).

Domanda: Se l'insieme di vettori $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ha rango 3 allora:

- ☐ **A** comunque si prendano tre dei quattro vettori sono linearmente indipendenti
- ☐ **B** è sempre possibile prendere tre dei quattro vettori in modo che siano linearmente dipendenti
- ☐ **C** anche $\{a_1, a_2, a_3\}$ ha rango 3
- ☐ **D** è sempre possibile esprimere in modo univoco uno dei vettori come combinazione lineare dei rimanenti tre
- ☐ **E** almeno tre dei quattro vettori sono linearmente indipendenti

Avvertenza: Per i due esercizi che seguono riporta in questo foglio prestampato **solo i risultati finali semplificati**, relativi alle voci indicate. I procedimenti usati per arrivare a tali risultati debbono essere presenti in modo ordinato e leggibile nei fogli protocollo assegnati: **la brutta copia verrà presa in considerazione esclusiva mente nel caso in cui i corrispondenti risultati finali siano riportati in questo foglio prestampato.**

Esercizio 1: Risolvi il sistema che segue, indicando esplicitamente come varia il numero delle sue soluzioni al variare del parametro k :

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ kx + 2y = 4 \\ 9x + 3y = k \end{cases}$$

1. Numero delle soluzioni al variare di k

Se $k = 6 \implies$ il sistema ha ∞^1 soluzioni;

Se $k \neq 6 \implies$ il sistema non ha soluzioni

2. Espressione esplicita delle soluzioni in funzione di k

Per $k = 6$ si hanno le ∞^1 soluzioni

$$x = \frac{2-\alpha}{3}, \quad y = \alpha$$

Esercizio 2: Calcola gli autovalori e gli autovettori di norma unitaria della matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

a. autovalori:

$$\lambda = -7 \qquad \lambda = 5$$

b. autovettori normalizzati::

$$\lambda = -7 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}} \right)$$

$$\lambda = 5 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

Matematica corso base

Prova scritta (Prima parte) del ____/____/____ Numero compito: XXX

Cognome (Stamp. Maiuscolo): _____ Nome: _____

Matricola: _____

Punteggio. Domanda: +2 per risposta giusta, 0 per risposta errata o mancante. Per ciascuno degli Esercizi da 0 a +4 (2+2).

Domanda: Se l'insieme di vettori $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ha rango 3 allora:

- ☐ **A** comunque si prendano tre dei quattro vettori sono linearmente indipendenti
- ☐ **B** è sempre possibile prendere tre dei quattro vettori in modo che siano linearmente dipendenti
- ☐ **C** anche $\{a_1, a_2, a_3\}$ ha rango 3
- ☐ **D** è sempre possibile esprimere in modo univoco uno dei vettori come combinazione lineare dei rimanenti tre
- ☐ **E** almeno tre dei quattro vettori sono linearmente indipendenti

Avvertenza: Per i due esercizi che seguono riporta in questo foglio prestampato **solo i risultati finali semplificati**, relativi alle voci indicate. I procedimenti usati per arrivare a tali risultati debbono essere presenti in modo ordinato e leggibile nei fogli protocollo assegnati: **la brutta copia verrà presa in considerazione esclusiva mente nel caso in cui i corrispondenti risultati finali siano riportati in questo foglio prestampato.**

Esercizio 1: Risolvi il sistema che segue, indicando esplicitamente come varia il numero delle sue soluzioni al variare del parametro k :

$$\begin{cases} 3x - y = k \\ kx + y = -1 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

1. Numero delle soluzioni al variare di k

Se $k = 2$ o $k = -\frac{5}{3} \implies$ il sistema ha soluzione unica;

se $k \neq 2$ e $k \neq -\frac{5}{3} \implies$ il sistema non ha soluzioni

2. Espressione esplicita delle soluzioni in funzione di k

Per $k = 2$ si ha la soluzione unica $x = \frac{1}{5}$, $y = -\frac{7}{5}$

Per $k = -\frac{5}{3}$ si ha la soluzione unica $x = -2$, $y = -\frac{13}{3}$

Esercizio 2: Calcola gli autovalori e gli autovettori di norma unitaria della matrice:

$$M = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

a. autovalori:

$$\lambda = -7$$

$$\lambda = -4$$

$$\lambda = 5$$

b. autovettori normalizzati::

$$\lambda = -7 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \left(\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}, 0 \right)$$

$$\lambda = -4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = (0, 0, 1)$$

$$\lambda = 5 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right)$$
